Chapitre 1

Notions de convexité

1.1 Ensembles convexes

Comme la combinaison linéaire affine, on définit :

Définition 1.1.1 *Soit $\mathcal{F} = \{x^i : i = 1, \cdots, k\}$ une famille finie de points de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire convexe de $\mathcal{F}$, toute combinaison linéaire $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ dont les coefficients λ_i sont positifs et de somme 1.*

Une combinaison linéaire convexe de deux points x et y, est tout point $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in [0,1]$

On a les définitions suivantes

Définition 1.1.2 *Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$; on appelle segment "fermé" d'extrémités x et y, l'ensemble noté $[x, y]$ et défini par :*

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\, x + \lambda y \ : \lambda \in [0,1]\}.$$

C'est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes des points x et y.

De façon analogue, on définit :

Définition 1.1.3 *On appelle segment "ouvert" d'extrémités x et y, et on le note $]x, y[$, l'ensemble*

$$]x, y[= \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\, x + \lambda y : \ \lambda \in]0,1[\}.$$

On définit aussi $]x, y]$ et $[x, y[$ qui sont appelés segment semi ouvert en x respectivement en y.

$$]x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\, x + \lambda y, \ \lambda \in]0,1]\}$$

$$[x, y[= \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\, x + \lambda y, \ \lambda \in [0,1[\}.$$

Définition 1.1.4 *Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. C est convexe si seulement si pour tout $x, y \in C$, $(1-\lambda)\, x + \lambda y \in C$ pour tout $\lambda \in [0.1]$. Autrement dit, C est convexe si seulement si C contient tout segment fermé d'extrémités deux quelconques de ses points.*

Exemple 1.1.1 - *Dans $\mathbb{R}^n$, les ensembles suivants sont convexes. $\mathbb{R}^n$, l'ensemble vide, les singletons, les boules, les segments.*

- *Dans $\mathbb{R}$, les parties convexes sont les intervalles.*

On a la proposition :

Proposition 1.1.1 *Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si seulement si elle contient toute combinaison linéaire convexe de toute famille finie d'éléments qui lui appartiennent.*

On a les propriétés suivantes
Les résultats suivants sont immédiats.

Proposition 1.1.2 1) *Si C_1 et C_2 sont convexes alors pour tous α_1 et α_2 dans $\mathbb{R}$, $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ est convexe.*
2) *Toute intersection de parties convexes est convexe.*

1.2 Points extrêmes d'un ensemble

Définition 1.2.1 *Soit A un sous ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$.
Un point x de A est un point extrême si*

$$\forall (x_1, x_2, \alpha) \in A^2 \times]0,1[, \ x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 = x.$$

i.e. x n'est point intérieur d'aucun segment de A.

On a la caractérisation suivante

Proposition 1.2.1 *Soit C un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*
i) $x \in \text{ext}(C)$
ii) $C \setminus \{x\}$ est convexe.

Preuve : Soit $x \in \text{ext}(A)$.
Si

$$(x_1, x_2, \alpha) \in (C \setminus \{x\}) \times (C \setminus \{x\}) \times]0,1[$$

alors

$$(x_1, x_2, \alpha) \in C \times C \times]0,1[\text{ et } x_1 \neq x \neq x_2.$$

Comme C est convexe, on a

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C \text{ et } x_1 \neq x \neq x_2.$$

Alors

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C \setminus \{x\}$$

et donc $C \setminus \{x\}$ est convexe.

Réciproquement, supposons que $C \setminus \{x\}$ est convexe et soit

$$(x_1, x_2, \alpha) \in C \times C \times]0,1[\text{ avec } (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = x.$$

Donc
$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \notin C \setminus \{x\}.$$
Ce qui implique que :
$$x_1 \notin C \setminus \{x\} \text{ ou } x_2 \notin C \setminus \{x\}$$
C'est-à-dire que $x_1 = x$ ou $x_2 = x$. Comme $(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = x$ avec $\alpha \in]0,1[$, on a nécessairement $x_1 = x = x_2$. D'où $x \in \text{ext}(C)$.

□

1.3 Polyèdres convexes

Définition 1.3.1 *On appelle hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ tout ensemble de la forme*
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = \alpha\}$$
où φ est une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Les demi-espaces fermés sont
$$\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leq \alpha\} \text{ et } \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \geq \alpha\}.$$

Les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < \alpha\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) > \alpha\}$ sont des demi espaces ouverts de frontière H.

Définition 1.3.2 *Un polyèdre convexe $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection (éventuellement vide) d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplans. C'est-à-dire :*
$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} a_i x \leq b_i, \ i = 1, \cdots, p_1, \\ a_i x \geq b_i, \ i = p_1 + 1, \cdots, p_2, \\ a_i x = b_i, \ i = p_2 + 1, \cdots, m \end{array} \right\}$$
où les a_i sont dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et les b_i dans $\mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$.

Remarque 1.3.1 *Dans cette définition on peut toujours supposer qu'on a un seul type d'inégalité.*

Définition 1.3.3 *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$. Un point $x \in \mathcal{P}$ est un sommet de $\mathcal{P}$ s'il existe $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que $cx < cy$ pour tout $y \in \mathcal{P}$, $y \neq x$.*

Définition 1.3.4 *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe*
$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \geq b_i, \ i = 1, \cdots, m\}.$$

- *Un point $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit point intérieur de $\mathcal{P}$ si on a, $a_i \bar{x} > b_i$ pour tout $i = 1, \cdots, m$.*
- *Un point $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit point frontière de $\mathcal{P}$ si il existe $i_0 \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $a_{i_0} \bar{x} = b_{i_0}$.*

Remarque 1.3.2 *Dans le cas où il existe des contraintes d'égalité dans le polyèdre on parle d'intérieur relatif et de frontière relative.*

On définit aussi la notion de face et d'arête d'un polyèdre

Définition 1.3.5 *Considérons X un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ de frontière ∂X. L'hyperplan H d'équation $ax = b$ est un hyperplan support pour X si :*

i) X est contenu dans un des deux demi-espaces fermés limités par H

ii) Il existe $\bar{x} \in \partial X$ tel que $a\bar{x} = b$.

On dit alors que l'hyperplan H supporte X en $\bar{x}$.

On montre que

Proposition 1.3.1 *Si C est convexe, alors pour tout point $\bar{x} \in \partial C$ il existe au moins un hyperplan supportan C en $_barx$.*

Proposition 1.3.2 *Tout convexe fermé est l'intersection de tous les demi-espaces fermés definis par ses hyperplans support.*

Définition 1.3.6 *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $F \subset \mathcal{P}$ est une face de $\mathcal{P}$ s'il existe un hyperplan support H de $\mathcal{P}$ tel que $F = H \cap \mathcal{P}$.*

Les ensembles $\mathcal{P}$ et $\emptyset$ sont des faces dites impropres.

Définition 1.3.7 *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$. On appelle arête de $\mathcal{P}$ toute face de dimension 1.*

On remarque que

Remarque 1.3.3 *Un sommet d'un polyèdre convexe est une face de dimension 0.*

On montre que

Proposition 1.3.3 *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$. On a les équivalences suivantes :*

i) x est un point extrême de $\mathcal{P}$

ii) x est un sommet de $\mathcal{P}$.

La question de l'existence de points extrêmes pour un polyèdre convexe est nécessaire.
On définit

Définition 1.3.8 *Un polyèdre convexe $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ contient une droite s'il existe $x \in \mathcal{P}$ et $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + \lambda d \in \mathcal{P}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

On a le résultat suivant.

Théorème 1.3.1 *Supposons que le polyèdre convexe*

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ a_i x \geq b_i, \ i = 1, \cdots, m \right\}$$

est non vide. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

a) Le polyèdre $\mathcal{P}$ contient au moins un point extrême.

b) Le polyèdre $\mathcal{P}$ ne contient pas de droite.

c) Le système $\{a_i^T \in \mathbb{R}^n \quad i = 1, \cdots, m\}$ contient n éléments linéairement independants.

Chapitre 2

Formulation d'un programme linéaire

2.1 Programmes linéaires

Définition 2.1.1 *Un programme linéaire est un programme mathématique dans lequel la fonction-objectif est affine et les contraintes sont des équations et/ou inéquations linéaires.*

On peut donc dire qu'un programme linéaire est un programme mathématique de la forme

$$\min\ (\max)\quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, & i = m_1+1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = m_2+1, \cdots, m \\ x_j \in \mathbb{R}, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

On peut donc dire qu'un programme linéaire est un programme mathématique dans lequel la fonction-objectif est linéaire et l'ensemble des contraintes est un polyèdre convexe fermé.

On a aussi les remarques suivantes :

Remarque 2.1.1 - *Etant donné un programme linéaire, on peut toujours se ramener à un programme linéaire où les variables sont astreintes à être non négatives. En effet si x_j est une variable négative on fait le changement de variable $x'_j = -x_j$. Si par contre x_j est quelconque dans $\mathbb{R}$ on pose $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec $x_j^+,\ x_j^- \geq 0$ car tout réel peut s'écrire comme la différence de deux réels positifs ou nuls.*

- Dans un programme linéaire on peut ramener toutes les contraintes d'inégalité à des inégalités de même type. il suffit de multiplier la contrainte par -1 le cas échéant.

Par convention les contraintes d'inégalité pour un problème de minimisation sont du type " $\geq$ " et les contraintes d'inégalité pour un problème de maximisation sont du type " $\leq$ "

On peut dire alors qu'un programme linéaire est un programme mathématique de la forme

$$\min\ (\max)\quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq (\leq)\, b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = m_1+1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Dans un programme linéaire on distingue deux types de contrainte : les contraintes relatives au signe des variables, dites contraintes de rectriction de signe ou de non-négativité et les autres dites vraies contraintes on dit aussi contraintes structurelles. la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée matrice des vraies contraintes, $c = (c_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, vecteur coût et $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, vecteur second membre.

2.2 Quelques exemples

Problème de production

Soient m machines M_i $(i = 1, \cdots, m)$ qui fabriquent en série n types de produits P_j $(j = 1, \cdots, n)$. La machine M_i a une capacité maximum de b_i unités de temps. La fabrication d'une unité du produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant a_{ij} unités de temps. Si c_j représente le gain relatif à la production d'une unité du produit P_j, quelle doit être la politique de production pour maximiser le gain total ?

Problème de transport

Soient r centres de production d'un bien donné possédant des stocks disponibles en quantités respectives $q_1, \cdots, q_r$. Dans s centres de consommation, la demande de ce bien est respectivement de $d_1, \cdots, d_s$. Les frais de transport d'une unité de bien du centre de production i au centre de consommation j est c_{ij} unités monétaires. Il s'agit de déterminer comment approvisionner les centres de consommation à partir des centres de production de manière à minimiser le coût total de transport. Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Problème de la ration alimentaire

On dispose de n aliments A_j $(j = 1, \cdots, n)$ aux prix respectifs par unité de c_j $(j = 1, \cdots, n)$.

Soient m éléments nutritifs e_i $(i = 1, \cdots, m)$. La quantité du $i^{\text{ème}}$ élément nutritif contenue dans une unité de l'aliment A_j est a_{ij}. Les besoins respectifs en les m éléments nutritifs sont b_i $(i = 1, \cdots, m)$.

On se propose de déterminer la ration alimentaire qui tout en étant de meilleur marché possible garantisse un apport suffisant en éléments nutritifs.

2.3 Forme standard, forme canonique

Dans cette partie on considère la relation suivante.

Pour u et v dans $\mathbb{R}^n$ on note

$$u \leq v \Leftrightarrow u_i \leq v_i \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

Définition 2.3.1 *Un programme linéaire est sous forme standard si les vraies contraintes sont des égalités et les variables sont astreintes à être non négatives. En d'autres termes, le problème est sous la forme*

$$\min\,(\max)\; Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Si on pose $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c = (c_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, on a la notation matricielle

$$\min(\max)\ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

On a la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Tout programme linéaire peut se mettre sous forme standard*

Preuve : Il suffit de transformer les contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité en considérant les équivalences suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

□

Définition 2.3.2 *La variable s_i introduite pour passer d'une contrainte d'inégalité à une contrainte d'égalité est appelée variable d'écart.*

Remarque 2.3.1 *Le passage à la forme standard augmente le nombre de variables dans le programme linéaire.*

Définition 2.3.3 *Un programme linéaire est sous forme canonique si les vraies contraintes sont des inégalités et les variables sont astreintes à être non négatives. Pour les problèmes de minimisation on a*

$$\min\ Z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

et pour les problèmes de maximisation on a

$$\max\ Z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

En considérant les mêmes notations que ci-dessus, on obtient respectivement pour la minimisation et la maximisation la notation matricielle suivante :

$$\min\ Z = cx \qquad\qquad \max\ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.3.2 *Tout programme linéaire peut se mettre sous forme canonique*

Preuve : Il suffit de transformer les contraintes d'égalité en contraintes d'inégalité en considérant l'une des équivalences suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i \end{cases}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i \end{cases}.$$

□

Remarque 2.3.2 *Le passage à la forme canonique augmente le nombre de contraintes dans le programme linéaire.*

Chapitre 3

Résolution des programmes linéaires

3.1 La méthode graphique

La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées pour résoudre les programmes linéaires.

On sait que l'ensemble des solutions réalisables d'un programme linéaire est polyèdre convexe fermé. Il peut être :
- vide,
- non vide et borné,
- non vide et non borné.

La méthode graphique est basée sur la propriété suivante qui est fondamentale en programmation linéaire.

Théorème 3.1.1 *Si le problème un programme linéaire possède une solution optimale, alors (au moins) un sommet du polyèdre des solutions réalisables est solution optimale.*

A titre d'exemples, résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants :

$$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min\ Z = x_1 + x_2 \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max\ Z = x_1 + x_2 \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cette méthode est limitée car elle ne s'applique qu'à des programmes linéaires où le nombre de variables est faible (au maximum 3 variables). Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à une méthode algébrique, la méthode du simplexe.

3.2 La méthode du simplexe

On considère le programme linéaire sous la forme standard suivant.

$$Z^* = \min\ Z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec rang$A = m < n$.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des solutions réalisables de (PL). On sait que $\mathcal{D}$ est un polyèdre convexe fermé. Il peut être vide, non vide et borné i.e. un polytope, non vide et non borné.

3.2.1 Base d'un système d'équations linéaires

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec rang$A = m < n$. On considère le système d'équations linéaires

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

On définit :

Définition 3.2.1 *On appelle base du système d'équations linéaires (3.1), toute sous matrice carrée régulière $(m \times m)$ extraite de A.*

inversible non inversible = singulière

Exemple 3.2.1

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 26 \end{cases}$$

La matrice de ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

On a rang$A = 2$. La sous matrice carrée formée de la première et quatrième colonnes est

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

On a det $B = 45 \neq 0$. C'est donc une base du système ci-dessus.

Remarque 3.2.1 *Il existe au moins une base pour le système (3.1) (puisque $rg(A) = m$) et il y en a au plus C_n^m.*

Définition 3.2.2 *Soit B une base de (3.1), les variables associés aux colonnes de B sont appelées variables de base, les autres, variables hors base.*

Remarque 3.2.2 *très souvent, et cela, pour éviter certaines indéterminations, on représente une base par son ensemble de variables de base ou par son ensemble des indices des variables de base.*

Définition 3.2.3 *On dit que deux bases B et B' sont adjacentes, si les colonnes qui les constituent ne diffèrent que d'un seul élément.*

Soit B une base de (3.1) ; moyennant une permutation on peut supposer que les colonnes de B sont les m premières colonnes de A. Donc on peut supposer que A est sous la forme (matrices blocs) $A = (B, N)$ où N est la sous-matrice formée par les colonnes de A qui ne sont pas dans B. De même on peut partitionner $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ où x_B est constitué des variables de base et x_N des variables hors base. Le système (3.1) est alors équivalent à

$$Bx_B + Nx_N = b. \tag{3.2}$$

Par suite les solutions de (3.1) sont

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}(b - Nx_N) \\ x_N \end{pmatrix}, \; x_N \in \mathbb{R}^{n-m}. \tag{3.3}$$

Définition 3.2.4 *On appelle solution de base de (3.1) associée (où relative) à la base B, la solution particulière $x(B)$ obtenue dans (3.3) en prenant $x_N = 0$ i. e. $x(B) = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$*

On montre que

Proposition 3.2.1 *$x \in \mathbb{R}^n$ est une solution de base de (3.1) si et seulement si on a $Ax = b$ et il existe des indices $B(1), \cdots, B(m)$ tels que :*
a) les colonnes $A_{B(1)}, \cdots, A_{B(m)}$ sont linéairement indépendantes ;
b) si $i \neq B(1), \cdots, B(m)$, alors $x_i = 0$.

3.2.2 Base réalisable d'un programme linéaire

Définition 3.2.5 *On appelle base de (PL) toute base du système $Ax = b$.*

Définition 3.2.6 *Soit B une base de (PL). On dit que B est une base réalisable pour (PL) si on a $B^{-1}b \geq 0$. Dans ce cas la solution de base associée à B est une solution réalisable pour (PL).*

Exemple 3.2.2

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min \; Z = 2x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 3x_5$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 26 \\ x \in \mathbb{R}^5, \; x \geq 0 \end{cases}$$

$I = \{x_1, x_3\}$ est une base réalisable. En effet, si on note B la matrice associée à I, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$ la base est dégénérée

Définition 3.2.7 *Une base réalisable B de (PL) est dite dégénérée si le vecteur $x_B = B^{-1}b$ contient au moins une composante nulle.*

Exemple 3.2.3

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min \; Z = -3x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 8 \\ x \in \mathbb{R}^5, \; x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $I = \{1, 3, 5\}$. La matrice associée à I est

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det B = -4 \neq 0$; donc I est une base.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

La base est alors réalisable ; mais le vecteur $B^{-1}b$ a une composante nulle. Donc la base I est dégénérée.

Définition 3.2.8 *Le programme (PL) est dit dégénéré s'il possède une base réalisable dégénérée.*

Il y a un lien entre les sommets du polyèdre des solutions réalisables de (PL) et les solutions de base réalisables. On montre que :

Théorème 3.2.1 *On a les équivalences suivantes :*
a) x est un sommet de $\mathcal{D}$,
b) x est une solution de base réalisable de (PL).

On montre que

Proposition 3.2.2 *Etant donné un programme linéaire sous forme standard, si l'ensemble des solutions réalisables est non vide, il contient au moins un sommet.*

On sait d'après le théorème (3.1.1) que si un programme linéaire possède une solution optimale, il admet un sommet et donc une solution de base réalisable comme solution optimale. Ce qui nous amène à chercher les conditions pour qu'une solution de base réalisable soit optimale.

3.2.3 Forme canonique par rapport à une base réalisable

On vient de voir que si (PL) possède un optimum fini, il existe au moins une base réalisable optimale. C'est pour cela qu'on s'intéresse dans ce qui suit aux conditions d'optimalité des solutions de base réalisables.

Soit B une base réalisable de (PL). On note I l'ensemble des indices des variables de base et J l'ensemble des indices des variables hors base.

On sait qu'on peut supposer sans perdre de généralités que B est formée des m premières colonnes de A et donc A est de la forme (matrices blocs) $A = (B, N)$ où N est la sous-matrice formée par les colonnes de A qui ne sont pas dans B. De même on peut partitionner $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ où x_B est constitué des variables de base et x_N des variables hors base.

Le système $Ax = b$ est alors équivalent à

$$Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \tag{3.4}$$

On peut aussi partitionner c de la façon suivante : $c = (c_B, c_N)$ où c_B est formé des coefficients des variables de base et c_N des coefficients des variables hors base. On a alors

$$Z(x) = cx = c_Bx_B + c_Nx_N.$$

En remplaçant x_B par sa valeur ($x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$), on a

$$Z(x) = c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N. \tag{3.5}$$

Posons

$$\hat{A} = B^{-1}A, \quad \hat{c} = c - c_BB^{-1}A, \quad \hat{Z} = c_BB^{-1}b \tag{3.6}$$

Donc $\hat{c}_B = 0$ et $\hat{c}_N = c_N - c_BB^{-1}N$.
On remarque qu'on a $Z(x(B)) = c_BB^{-1}b = \hat{Z}$.

même

Définition 3.2.9 *Deux programmes linéaires sont dits équivalents s'ils ont les solutions réalisables et les mêmes solutions optimales.*

Définition 3.2.10 *Le programme linéaire (PL) est équivalent au programme linéaire :*

$$Z^* = \min\ Z = \hat{c}x + \hat{Z}$$
$$\begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

C'est la forme canonique (ou forme équivalente) de (PL) par rapport à la base réalisable B.

Remarque 3.2.3 *Ecrire un programme linéaire sous forme canonique par rapport à une base réalisable, c'est écrire sa fonction-objectif ainsi que ses variables de base en fonction des seules variables hors base.*

En d'autres termes il s'agit d'écrire la fonction-objectif à l'aide des seules variables hors base et transformer le système des vraies contraintes en un système équivalent dans lequel chaque variable de base n'intervient que dans une seule équation, et dans cette équation son coeffcient est égal à 1. On dira alors que cette dernière est la variable de base associée à cette équation.

Exemple 3.2.4

La forme canonique du programme linéaire de l'exemple (3.2.2) par rapport à la base réalisable $I = \{x_1, x_3\}$ est :

$$\min\ Z = 14 - 5x_2 + 44x_4 - 3x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 19x_2 + 45x_4 + 4x_5 = 1 \\ x_3 - 13x_2 - 31x_4 - 2x_5 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.2.4 Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

On peut à présent donner les conditions d'optimalité pour une solution de base réalisable.

Théorème 3.2.2 *Une condition suffisante pour que B soit une base réalisable optimale est $\hat{c} \geq 0$.*

Preuve : Dans (PL) on a la contrainte $x_N \geq 0$. Donc pour toute solution réalisable x de (PL), on aura

$$Z(x) = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \leq c_B B^{-1} b = Z(x(B)).$$

Par suite $x(B)$ est une solution optimale de (PL). □

Remarque 3.2.4 *Pour un problème de maximisation la condition suffisante d'optimalité est $\hat{c} \leq 0$.*

Dans le cas de non dégénérescence la condition suffisante ci-dessus est aussi nécessaire.

ci-dessous

Théorème 3.2.3 *Si le problème (PL) est non dégénéré i.e. ne possède pas de base réalisable dégénérée, une condition nécessaire et suffisante pour que B soit optimale est $\hat{c} \geq 0$.*

Théorème 3.2.4 *Soit k dans J tel que $\hat{c}_k < 0$. Si $\hat{A}_k$, la colonne associée à la variable x_k dans la matrice $\hat{A}$ est telle que $\hat{A}_k \leq 0$, alors on peut diminuer indéfiniment la fonction objectif, ce qui signifie que $(z^* = -\infty)$. On dit alors que l'optimum de (PL) est non borné ou que (PL) n'admet pas de solution optimale à distance finie.*

Preuve : Considérons dans le système $Ax = b$ la solution $x(\alpha)$ obtenue en imposant aux variables hors base les valeurs suivantes :

$$x_j = 0 \quad \forall j \in J - k \text{ et } x_k = \alpha.$$

On obtient alors

$$x_i = \hat{b}_i - \alpha \hat{a}_{ik} \quad \forall i \in I.$$

La solution $x(\alpha)$ est réalisable pour tout $\alpha \geq 0$.
On a :

$$Z(x(\alpha)) = \hat{Z} + \sum_{j \in J} \hat{c}_j x_j = \hat{Z} + \alpha \hat{c}_k$$

Comme $\hat{c}_k < 0$, on a $Z(x(\alpha))$ qui tend vers $-\infty$ pour λ tendant vers $+\infty$. Donc $Z^* = -\infty$. □

Exemple 3.2.5

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min\ Z = -x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 4 \\ x \in \mathbb{R}^5,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $I = \{1, 2, 5\}$. La matrice associée à I est

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{43}{3} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Donc c'est une base réalisable. La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4$$
$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = \frac{8}{3} \\ x_5 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{43}{3} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La colonne de la variable hors base x_3 est négative dans cette forme. On remarque que

$$x(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\alpha \\ \frac{43}{3} + \frac{2}{3}\alpha \end{pmatrix}$$

est réalisable quel que soit $\alpha \geq 0$ et $Z(x(\alpha)) = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3}\alpha$ qui tend vers $-\infty$ quand α tned vers $+\infty$. Le problème est alors non borné.

Remarque 3.2.5 *On a les mêmes résultats dans le cas des problèmes de maximisation si on remplace la condition $\hat{c}_k < 0$ par $\hat{c}_k > 0$ dans le théorème (3.2.4).*

Dans le théorème qui suit on montre que si pour tout $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$, on a $\hat{A}_k \nleq 0$ alors il existe une base réalisable qui améliore la fonction-objectif Z.

Théorème 3.2.5 *Soit B une base réalisable, on note I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base, $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$. Soit $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ et $\hat{A}_k \nleq 0$. Soit l tel que*

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : i \in I,\ \hat{a}_{ik} > 0\right]$$

Alors la matrice B' associée aux variables dont les indices sont dans $I' = I - l + k$ est une base réalisable adjacente à B. Et on a

$$Z(x(B')) = Z(x(B)) + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}}.$$

Preuve : La matrice associée à $I' = I - l + k$ est $B' = BM$. où

$$M = \begin{pmatrix} e_1 \; e_2 \; \cdots \; e_{l-1} \; \hat{A}_k \; e_{l+1} \; \cdots \; e_m \end{pmatrix}$$

les e_i étant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

On a

$$\det(B') = \det B \det M = \hat{a}_{lk} \det B \neq 0.$$

Donc I' est une base.

En considérant la forme canonique du programme (PL) par rapport à la base B, on constate que le système $Ax = b$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j \in J-k} \hat{a}_{ij} x_j + \hat{a}_{ik} x_k = \hat{b}_i & \forall i \in I - l \\ x_l + \sum_{j \in J-k} \hat{a}_{lj} x_j + \hat{a}_{lk} x_k = \hat{b}_l \end{cases}$$

La solution de base associée à $I' = I - l + k$ est :

$$\begin{cases} x_j = 0 & \forall j \in J - k + l \\ x_k = \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \\ x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ik} \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} & \forall i \in I - l \end{cases}$$

Pour que cette solution de base soit réalisable il suffit qu'elle vérifie les contraintes de non-négativité, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_k = \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0 \\ x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ik} \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0 & \forall i \in I - l \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$0 \leq \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : \; i \in I, \; \hat{a}_{ik} > 0 \right],$$

qui est vrai par le choix de l. Par suite $I' = I - l + k$ est une base réalisable. En outre on a :

$$Z(x(B')) = \hat{Z} + \hat{c}_k x_k = \hat{Z} + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = Z(x(B)) + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}}.$$

Comme

$$\hat{c}_k < 0 \text{ et } \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0,$$

on a bien $Z(x(B')) \leq Z(x(B))$. □

Remarque 3.2.6 *Si la base B est non dégénérée, on a : $Z(x(B')) < Z(x(B))$. c'est-à-dire que la décroissance est stricte.*

On peut à présent donner l'algorithme du simplexe.

3.2.5 Algorithme primal du simplexe

L'algorithme du simplexe contient deux phases : la phase 1 et la phase 2.

Phase 1

Dans cette phase on détermine une première solution de base réalisable du problème. Si cette procédure échoue, cela signifie que le polyèdre des solutions réalisables $\mathcal{D}$ du problème est vide.

Phase 2

Dans cette partie, on calcule à partir de la solution réalisable obtnue dans la phase 1 une autre solution de base réalisable donnant une meilleure valeur de la fonction-objectif. Géométriquement, une itération consiste à passer d'un sommet de $\mathcal{D}$ à un sommet de $\mathcal{D}$; ce nouveau sommet est adjacent au premier en ce sens qu'ils sont les extrémités d'une arête de $\mathcal{D}$.

Nous donnons ici une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe.

Phase 2 de l'algorithme du simplexe

Dans une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe appliqué au problème (PL) on procède comme suit.

Début

On suppose qu'on dispose d'une base réalisable de depart B. Soit I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base.

1) Calculer $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$. (condit° d'optimalité)

2) Tester $\hat{c}$.

a) Si $\hat{c} \geq 0$, stop : "La base B est optimale."

b) S'il existe $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$, stop : "Le problème est non bornée i.e. la valeur optimale est infinie." (composantes hors base)

c) Autrement effectuer un changement de base.

3) Changement de base

a) **Test d'entrée :** Soit $k \in J$ tel que

$$\hat{c}_k = \min\left[\hat{c}_j \ : \ j \in J,\ \hat{c}_j < 0\right].$$

La variable correspondante x_k rentre dans la base on l'appelle variable rentrante.

b) **Test de sortie :** Soit l tel que

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \ : \ i \in I,\ \hat{a}_{ik} > 0\right].$$

La variable x_l sort de la base on l'appelle variable sortante.

c) On considère la nouvelle base réalisable encore notée B dont les ensembles des indices de variables de base et hors base sont respectivement

$$I := I - l + k \text{ et } J := J - k + l$$

Aller à 1).

Fin

Remarque 3.2.7 *Dans le cas d'un problème de maximisation, il n'est pas nécessaire de transformer le problème en un problème de minimisation afin d'appliquer l'algorithme du simplexe. Il suffit de considérer les modifications suivantes :*

$2-a)$ *Si* $\hat{c} \leq 0$ *stop : "la base B est optimale."*

$2-b)$ *S'il existe* $k \in J$ *tel que* $\hat{c}_k > 0$ *avec* $\hat{A}_k \leq 0$ *stop : "le problème est non bornée i.e. la valeur optimale est infinie."*

$3-a)$ **Test d'entrée :** *Soit* $k \in J$ *tel que*

$$\hat{c}_k = \max\left[\hat{c}_j \ : \ j \in J, \ \hat{c}_j > 0\right].$$

La variable correspondante x_k *rentre dans la base.*

Les autres instructions restent valables.

3.2.6 Convergence de l'algorithme du simplexe

On a le résultat suivant

Théorème 3.2.6 *Si à chaque base réalisable rencontrée dans résolution du problème* (PL) *la solution de base associée est non dégénérée, l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations par l'une des deux situations suivantes :*

i) obtention d'une solution de base réalisable optimale de (PL)

ii) absence de solution optimale à distance finie.

Ce théorème montre la convergence de l'algorithme du simplexe en l'absence de dégénérescence.
On montre que

Proposition 3.2.3 *Si à une itération de l'algorithme du simplexe l'ensemble*

$$\mathcal{L} = \left\{ l : \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : \ i \in I, \ \hat{a}_{ik} > 0\right]\right\}$$

contient plus d'un élément, alors le problème (PL) *est dégénéré i.e. il existe une base dégénérée.*

Lorsque le problème est dégénéré, l'algorithme du simplexe peut cycler c'est-à-dire qu'on peut retrouver une base déjà rencontrée. Pour remédier à cela on peut utiliser l'une des règles suivantes.
- la règle de Bland ou la règle du plus petit indice
- la règle lexicographique
- la règle de perturbation

La règle de Bland

Test d'entrée : La variable qui rentre dans la base est x_k avec k le plus petit indice pour lequel $\hat{c}_k < 0$

Test de sortie : La variable qui sort de la base est x_l avec l le plus petit élément de $\mathcal{L}$.

3.2.7 Méthode des tableaux

C'est une mise en œuvre manuelle de l'algorithme du simplexe.

Soit à résoudre le programme linéaire (PL)

$$Z^* = \min \ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases}$$

toujours avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et rang$A = m < n$.

On suppose qu'on dispose d'une base réalisable de départ B Les ensembles des indices des variables de base et hors-base sont I et J.

La forme canonique de (PL) par rapport à B est

$$Z^* = \min \ Z = \hat{c}x \ + \hat{Z}$$
$$\begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases}$$

On sait que $\hat{A} = (I_m, B^{-1}N)$, $\hat{c}_N = (0, c_N - c_B B^{-1}N), \hat{b} = B^{-1}b$.

On définit :

Définition 3.2.11 *On appelle tableau simplexe complet de (PL) par rapport à la base réalisable B, le tableau à $m+1$ lignes et $n+1$ colonnes ci-dessous*

	$x_i \ i \in I \ x_j \ j \in J$	
x_i $i \in I$	$\hat{A}$	$\hat{b}$
	$\hat{c}$	$-\hat{Z}$

Définition 3.2.12 *On appelle tableau simplexe de (PL) par rapport à la base réalisable B, le tableau à $m+1$ lignes et $n-m+1$ colonnes ci-dessous*

	$x_j \ j \in J$	
x_i $i \in I$	$\hat{A}_N = B^{-1}N$	$\hat{b}$
	$\hat{c}_N$	$-\hat{Z}$

A partir du tableau simplexe on peut écrire la forme canonique de (PL) par rapport à la base B et inversement.

On définit :

Définition 3.2.13 *Dans le tableau simplexe, on appelle pivot l'élément qui est à l'intersection de la colonne de la variable rentrante et de la ligne de la variable sortante.*

Dans ce cas la ligne correspondante est dite ligne du pivot et la colonne, colonne du pivot.

La méthode des tableaux consiste à écrire les tableaux simplexes relatifs aux différentes bases rencontrées dans la résolution du programme (PL) à l'aide de l'algorithme du simplexe. Il faut donc déterminer pour deux bases successives dans l'algorithme du simplexe B et B' comment passer du tableau simplexe relatif à B à celui relatif à B'.

Pour obtenir le tableau simplexe de (PL) relatif à B' à partir de celui relatif à B on utilise le cadre du tableau simplexe relatif à B et on considère les règles suivantes.

1) Permuter les variables sortante et rentrante.
2) Remplacer le pivot par son inverse
3) Diviser les autres éléments de la ligne du pivot par le pivot
4) Diviser les autres éléments de la colonne du pivot par le pivot et changer de signe.
5) Pour les autres éléments du tableau, appliquer la règle du rectangle suivante :

Règle du rectangle

Soit $l \in I$ la ligne du pivot et $k \in J$ la colonne du pivot.

Pour $i \in I - l$ et $j \in J - k$, l'élément $\hat{a}_{ij}$ est remplacé par $\hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$.
On note alors

$$\hat{a}_{ij} := \hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$$

Cette règle s'applique à tous les éléments du tableau.

Remarque 3.2.8 *Si une ligne intersecte la colonne du pivot par un zéro, la ligne reste inchangée. Si une colonne intersecte la ligne du pivot par un zéro, la colonne reste inchangée.*

Dans la méthode des tableaux une base sera désignée indifféremment par la matrice elle-même ou par l'ensembles des indices des variables de base associées.

Exemple 3.2.6

$$\min \; Z = -3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1, \; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\min \; Z = -3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \ge 0, \; i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3, \; x_4, \; x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	2	1	5	
x_4	1	-1	1	←
x_5	1	2	3	
	-3	2	0	
	↑			

TS2

	x_4	x_2		
x_3	-2	3	3	
x_1	1	-1	1	
x_5	-1	3	2	←
	3	-1	3	
		↑		

TS3

	x_4	x_5	
x_3	-1	-1	1
x_1	2/3	1/3	5/3
x_2	-1/3	1/3	2/3
	8/3	1/3	11/3

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée, on est donc à l'optimum.
Une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -\frac{11}{3}$.

Exemple 3.2.7

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1 (Petit)

	x_1	x_2		
x_3	1	1	8	
x_4	-2	3	6	
x_5	1	-1	2	←
	6	5	0	
	↑			

TS2

	x_5	x_2		
x_3	-1	2	6	←
x_4	2	1	10	
x_1	1	-1	2	
	-6	11	-12	
		↑		

TS3

	x_5	x_3	
x_2	-1/2	1/2	3
x_4	2	-1/2	7
x_1	1	1/2	5
	-1/2	-11/2	-45

Tous les coefficients de la fonction-objectif sont négatifs ou nuls on est donc à l'optimum. Une solution optimale du problème initial est $x^* = (5, 3)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 45$.

Exemple 3.2.8

$$\min\ Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\min\ Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	-2	3	6	
x_4	1	-4	4	←
	-3	5	0	
	↑			

TS2

	x_4	x_2	
x_3	2	-5	14
x_1	1	-4	4
	3	-7	12
		↑	

On remarque que la colonne de la variable x_2 est toute négative, il n y a donc pas de pivot. Le programme linéaire est alors non borné ; c'est-à-dire que la valeur optimale est $-\infty$.

Exemple 3.2.9 (Problème dégénéré)

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	4	3	12	
x_4	4	1	8	$\leftarrow$
x_5	4	-1	8	
	3	2	0	
	$\uparrow$			

TS2

	x_4	x_2		
x_3	-1	2	4	$\leftarrow$
x_1	1/4	1/4	2	
x_5	-1	0	0	
	-3/4	5/4	-6	
		$\uparrow$		

TS3

	x_4	x_3	
x_2	-1/2	1/2	2
x_1	3/8	-1/8	3/2
x_5	-2	1	4
	-1/8	-5/8	-17/2

On est à l'optimum. Une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{3}{2}, 2)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{17}{2}$.

3.2.8 Initialisation de l'algorithme du simplexe 2 (méthode des 2 phases)

Dans cette phase d'initialisation, qu'on appelle aussi la phase 1 du simplexe, on y détermine une première base réalisable du programme (PL).

On suppose ici que $b \geq 0$.

On considère le problème auxiliaire suivant.

$$\xi^* = \min\ \xi = \sum_{i=1}^{m} x_i^a$$
$$\begin{cases} Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0,\ x^a \geq 0 \end{cases} \qquad (P_a)$$

Les variables x_i^a, $i \in \{1, \cdots, m\}$ sont appelées variables artificielles. Elles sont introduites juste pour créer une base réalisable évidente pour (P_a).

Par définition de (P_a), on a $\xi^* \geq 0$.

On remarque aussi que la matrice des vraies contraintes de (P_a) est $\tilde{A} = (A, I_m)$. Donc, $\text{rang}\tilde{A} = m < n + m$. Par suite avec l'hypothèse que $b \geq 0$, la matrice formée des colonnes des variables artificielles est une base réalisable évidente de (P_a). on peut résoudre ce dernier à l'aide de la phase 2 du simplexe en partant de cette base.

On résoud (P_a) et on tire les conclusions suivantes.

1[er] **cas** $\xi^* > 0$:

Si la valeur optimale de (P_a) n'est pas nulle alors le problème (PL) est impossible. Car en effet si (PL) possédait une solution réalisable on montre facilement que $\xi^* \leq 0$.

2$^{\text{ème}}$ cas $\xi^* = 0$:

Notons (x^*, x^{a*}) la solution optimale de (P_a) obtenue où x^* est relative aux variables structurelles ou initiales du problème (PL) et x^{a*} les variables artificielles. On a nécessairement $x^{a*} = 0$.

1) Si dans cette solution toutes les variables artificielles sont hors-base c'est-à-dire que la base optimale de (P_a) est constituée uniquement de colonnes de la matrice A, alors cette dernière est une base réalisable de (PL).

2) Si par contre il existe des variables artificielles dans la base, c'est-à-dire que la base optimale de (P_a) est constituée de colonnes de A pour les variables structurelles et de colonnes de la matrice I_m pour les variables artificielles. Cette base n'est pas nécessairement une base de (PL).

Supposons que les variables artificielles dans la base optimale de (P_a) sont x_i^a, $i \in P$. On a deux cas possibles.

On suppose que le problème (P_a) est sous forme canonique par rapport à la base optimale.

a) Si $\forall i \in P$. la ligne correspondant à la variable de base artificielle x_i^a contient un coefficient non nul relatif à une variable non artificielle x_j, alors on peut faire un changement de base. Dans la nouvelle base la variable artificielle x_i^a est remplacée par la variable x_j. On obtient ainsi à la fin une base réalisable optimale de (P_a) constituée uniquement de colonnes de A. C'est donc une base réalisable de (PL). Mais cette base est dégénérée.

b) Dans le cas contraire, si une variable artificielle dans la base optimale ne peut pas être remplacée par une variable non artificielle, cela signifie que l'équation à laquelle est associée cette variable artificielle est redondante. C'est-à-dire qu'elle est combinaiqon linéaire d'autres équations. Elle peut donc être supprimée.

Donc si on a un nombre q variables de ce genre, on a $\text{rang}A = m - q$. Dans ce cas les q lignes correspondantes peuvent être éliminées. Les $m - q$ variables restantes dans la base optimale de (P_a) forment une base réalisable de (PL).

Remarque 3.2.9 *1) Dans la méthode des tableaux lorsqu'on ne dispose pas de base réalisable évidente et qu'on veuille appliquer soit la méthode des deux phases, on peut tenir compte de la situation suivante.*

Etant donné que dans le programme auxiliaire l'introduction des variables artificielles sert à créer uniquement une base réalisable évidente, il n'est pas nécessaire d'en ajouter systématiquement à chaque équation.

Si une variable n'intervient que dans une seule équation et si le signe de son coefficient est égal à celui du second membre de cette équation il n'est pas nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation. Cette variable peut être considérée comme variable de base associée associée à cette équation.

2 phases

2) Dans la méthode des tableaux lorsqu'une variable artificielle sort de la base il est certain qu'elle ne peut plus y revenir la colonne correspondante devient superflue et peut être supprimée.

Exemple 3.2.10

1) $\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la phase 1.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min \xi = x_5 + x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$I = \{x_5, x_6\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ \xi = 14 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1		x_1	x_2	x_3	x_4		
	x_5	1	1	1	0	5	
	x_6	2	1	3*	-1	9	←
		-3	-2	-4	1	-14	
				↑			

TS2		x_1	x_2	x_6	x_4		
	x_5	1/3	2/3	⋮	1/3	2	←
	x_3	2/3	1/3	⋮	-1/3	3	
		-1/3	-2/3	⋮	-1/3	-2	
			↑				

TS3		x_1	x_5	x_4	
	x_2	1/2	⋮	1/2	3
	x_3	1/2	⋮	-1/2	2
		0	⋮	0	0

$I = \{x_2, x_3\}$ est une base réalisable du problème initial.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z = -x_4 + 11$$
$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 3 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :